УДК 519.632: 621.3.011.222

О ПРИМЕНЕНИИ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА ПРИ РЕШЕНИИ ОДНОГО КЛАССА ОБРАТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ЗАДАЧ

А.Я. Бомба, Л.Л. Крока

Аннотация

На основе численного метода комплексного анализа предложен подход к решению одного класса двумерных обратных задач в областях, ограниченных линиями тока и эквипотенциальными линиями. **Ключевые слова:** (обратные коэффициентный задачи, идентификация, стационарные процессы, эллиптические дифференциальные уравнения, квазиконформные отображения)

1. Введение

Задачи идентификации возникают на этапе адаптации математической модели изучаемому объекту по известным данным или в случае диагностики состояния этого объекта на основе наблюдений за динамикой изменения значений его основных параметров (см., напр., [1-3]). Подавляющее большинство из имеющихся публикаций посвящено методам и алгоритмам идентификации. Количество таких работ устойчиво растет, а область практического использования предлагаемых алгоритмов постоянно расширяется. Однако на сегодня остаются недостаточно исследованными специальные классы задач идентификации параметров квазиидеальных процессов, описываемых эллиптическими дифференциальными уравнениями.

Замечено, что лучшие результаты по идентификации параметров нелинейных математических моделей стационарных процессов дают итерационные подходы, основанные на поочередном решении задач анализа и синтеза [4]. Отсюда, учитывая особенности реализации алгоритмов численного решения краевых задач на квазиконформных отображения областей различной геометрической конфигурации, ограниченных линиями тока и еквиквазипотенциальнимы линиями [5-7], перспективным является их применение к решению соответствующих обратных коэффициентных задач. Здесь и далее термин "обратная задача"по контексту понимаеться и как обратная коэффициентная задача, которая заключается в идентификации параметров математических моделей, и как обратная задача на квазиконформное отображение, сущность которой заключается в построении квазиконформных отображения области комплексного потенциала на физическую область.

В этой работе проиллюстрировано возможность применения идей численных методов комплексного анализа [5-6] к идентификации коэффициентов в краевых задачах при изучении стационарных процессов (например, идентификация коэффициента фильтрации гидрогеологической модели или коэффициента электрической проводимости на основе экспериментальных данных электротомографии и т.п.). Разработан алгоритм идентификации для случая, когда искомый коэффициент в области комплексного потенциала допускает разделение переменных.

2. Постановка задачи

Пусть $G_z \subset R^2$ – односвязная криволинейная область, ограниченная гладкой замкнутой кривой ∂G_i (рис.1). Необходимо найти функцию $\phi = \phi(x, y)$ (функция квазипотенциала скорости $\vec{v} = (v_x, v_y) = \kappa \cdot grad\ \phi$; $\psi = \psi(x, y)$) при условии идентификации коэффициента κ (характеризует проводимость среды), которые удовлетворяют эллиптическому уравнению:

$$\operatorname{div}(\kappa \cdot \operatorname{grad} \phi) = 0, (x, y) \in G_z \tag{1}$$

и совокупности $p (p \in N)$ краевых условий:

$$\phi(M) = g_i(M), \kappa \cdot \frac{\partial \phi(M)}{\partial n} = f_i(M), M \in \partial G_i, i = \overline{1, p}. \tag{2}$$

Здесь $\partial G_i = \{(x, y) : x = \hat{x}(\tau), y = \hat{y}(\tau), \tau \in [\tau_*, \tau^*] = A_i\overset{\frown}{B}_i \bigcup B_i\overset{\frown}{C}_i \bigcup C_i\overset{\frown}{D}_i \bigcup D_i\overset{\frown}{A}_i\}$, $\hat{x}(\tau), \hat{y}(\tau)$ – периодические определенные обратимые функции (точки A_i, B_i, C_i, D_i определяются параметрами $\tau_{A_i}, \tau_{B_i}, \tau_{C_i}, \tau_{D_i}, \tau_* = \tau_{A_i} \leq \tau_{D_i} \leq \tau_{C_i} \leq \tau_{B_i} =\leq \tau^*_{A_i} = \tau^*$); $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к ∂G_i; $g_i(M) = \left[\begin{array}{l} \phi_{i*}, (x, y) \in A_i\overset{\frown}{B}_i, \\ \overline{\phi_i}(x, y), (x, y) \in B_i\overset{\frown}{C}_i, \\ \phi^*_i, (x, y) \in C_i\overset{\frown}{D}_i, \\ \underline{\phi}_i(x, y), (x, y) \in A_i\overset{\frown}{D}_i, \end{array}\right.$ $f_i(M) = \left[\begin{array}{l} \overline{\psi}_i, (x, y) \in A_i\overset{\frown}{B}_i, \\ Q_i(x, y), (x, y) \in B_i\overset{\frown}{C}_i, \\ \underline{psi}_i, (x, y) \in C_i\overset{\frown}{D}_i, \\ 0, (x, y), (x, y) \in A_i\overset{\frown}{D}_i, \end{array}\right.$ причем $\int\limits_{\partial G_i} f_i(x, y)\ dl = 0$; $Q_i = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} -v_y\ dx + v_x\ dy$ – поток векторного поля; $\overline{\phi}_i(x, y), \underline{\phi}_i(x, y), \overline{\psi}_i(x, y), \underline{\psi}_i(x, y)$ – определённые непрерывные монотонные функции ($\phi_{i*} \leq \underline{\phi}_i(x, y) \leq \phi^*$, $\underline{\phi}(\hat{x}(\tau_{A_i}), \hat{y}(\tau_{A_i})) = \phi_{i*}$, $\underline{\phi}(\hat{x}(\tau_{D_i}), \hat{y}(\tau_{D_i})) = \phi^*_i$; $\phi_{i*} \leq \overline{\phi}_i(x, y) \leq \phi^*$, $\overline{\phi}(\hat{x}(\tau_{B_i}), \hat{y}(\tau_{B_i})) = \phi_{i*}$, $\overline{\phi}(\hat{x}(\tau_{C_i}), \hat{y}(\tau_{C_i})) = \phi^*_i$; $0 \leq \overline{\psi}(x, y) \leq Q_i$, $\overline{\psi}(\hat{x}(\tau_{A_i}), \hat{y}(\tau_{A_i})) = 0$ $\overline{\psi}(\hat{x}(\tau_{B_i}), \hat{y}(\tau_{B_i})) = Q$); $0 \leq \underline{\psi}(x, y) \leq Q_i$, $\underline{\psi}(\hat{x}(\tau_{D_i}), \hat{y}(\tau_{D_i})) = 0$ $\underline{\psi}(\hat{x}(\tau_{C_i}), \hat{y}(\tau_{C_i})) = Q$).

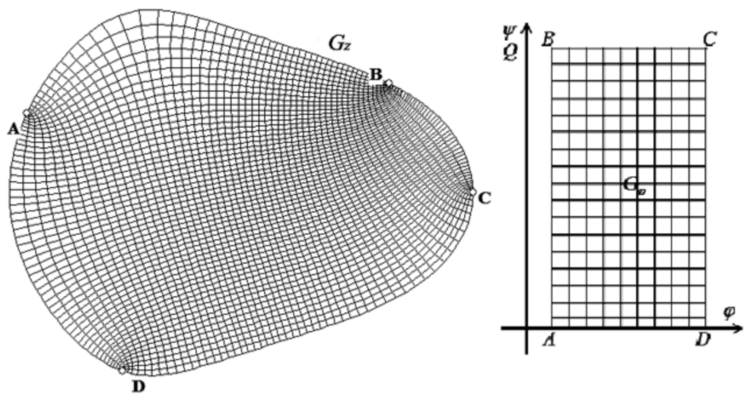

Рис. 1. Пример физической области (а) и соответствующей ей области квазикомплексного потенциала (б)

Заметим, что решение задачи идентификации является достаточно сложной проблемой и предполагает использование в случае произвольной зависимости κ от своих аргументов, учитывая необходимость обеспечения корректности постановки краевой задачи для эллиптических уравнений, определенного рода совокупность краевых задач (все возможные положения точек на и соответственно задания краевых условий или такое их количество $p(p \in N)$, которое бы обеспечило корректность поставленной задачи для заданной размерности матрицы значений искомого коэффициента κ).

В этой работе предполагается, что искомый коэффициент в области комплексного потенциала допускает разделения переменных – $\kappa = \kappa(\phi, \psi) = \kappa_1(\phi)\kappa_2(\psi)$ ((ϕ, ψ) – координаты области комплексного потенциала; $\psi = \psi(x, y)$ – функция течения, комплексно сопряженная к ϕ), $\psi(T) = \int\limits_{\widehat{MT}} \kappa \frac{\partial \phi}{\partial n}\, dl, M \in AD, T \in G_z$. Следовательно поставленая задача идентификации (1)-(2) согласно приведенных выше обозначений может быть сведена к следующей краевой задачи с заданием краевых условий только для одного положения угловых точек A, B, C, D на границе ∂G_z:

$$\operatorname{div}(\kappa \cdot \operatorname{grad} \phi) = 0, (x, y) \in G_z; \tag{3}$$

$$\phi(M) = \phi_*, \int\limits_{AM} \kappa \cdot \frac{\partial \phi(M)}{\partial n}\, dl = \widetilde{\psi}(M), M \in \widehat{AB}; \phi(T) = \phi^*, T \in \widehat{CD}; \tag{4}$$

$$\frac{\partial \phi(P)}{\partial n} = 0, \phi(P) = \widetilde{\phi}(P), P \in \widehat{AD}; \tag{5}$$

$$\frac{\partial \phi(N)}{\partial n} = 0, N \in \widehat{BC}; \int\limits_{\widehat{AB}} -v_y dx + v_x dy = Q. \tag{6}$$

3. Метод комплексного анализа

Учитывая преимущества применения квазиконформных отображений к решению краевых задач математической физики (в частности, упрощение процедур построения сеточной области - равномерного разбиения физической области линиями уровня и линиями тока), перейдем от (3) - (6) в следующей более общей задачи на квазиконформное отображение физической области на область комплексного потенциала согласно описанных в [5-6] алгоритмов:

$$\kappa_1(\phi)\kappa_2(\psi)\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \kappa_1(\phi)\kappa_2(\psi)\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, (\phi, \psi) \in G_\omega; \tag{7}$$

$$\phi(P) = \phi_*, \psi(P) = \widetilde{\psi}(P), P \in \widehat{AB}; \psi(M) = 0, \phi(M) = \widetilde{\phi}(M), M \in \widehat{AD}; \tag{8}$$

$$\phi(T) = \phi^*, T \in \widehat{CD}; \psi(N) = Q, N \in \widehat{BC}\ . \tag{9}$$

Здесь $G_\omega = \{(\phi, \psi) : \phi_* \le \phi \le \phi^*, 0 \le \psi \le Q\}$.

Воспользуемся переходом от задачи (7)-(9) к обратной краевой задачи на квазиконформное отображение $z = z(\omega) = x(\phi, \psi) + iy(\phi, \psi)$ области G_ω на G_z, которая в свою очередь сводится к отысканию функций $x(\phi, \psi), y(\phi, \psi), \kappa(\phi, \psi)$, которые удовлетворяют следующим условиям [см., напр., 6]:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{\kappa_1(\phi)\kappa_2(\psi)}\frac{\partial x}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{1}{\kappa_1(\phi)\kappa_2(\psi)}\frac{\partial x}{\partial \psi}\right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{\kappa_1(\phi)\kappa_2(\psi)}\frac{\partial x}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{1}{\kappa_1(\phi)\kappa_2(\psi)}\frac{\partial x}{\partial \psi}\right) = 0; \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} x(\phi_*, \psi) = \hat{x}\left(\widetilde{\psi}^{-1}(\psi)\right), y(\phi_*, \psi) = \hat{y}\left(\widetilde{\psi}^{-1}(\psi)\right), 0 \le \psi \le Q, \\ x(\phi, 0) = \hat{x}\left(\widetilde{\phi}^{-1}(\phi)\right), y(\phi, 0) = \hat{y}\left(\widetilde{\phi}^{-1}(\phi)\right), \phi_* \le \phi \le \phi^*; \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} x(\phi^*,\psi)=\hat{x}\left(\tau_{CD}\right), y(\phi^*,\psi)=\hat{y}\left(\tau_{CD}\right), \tau_D\le\tau_{CD}\le\tau_C, \\ x(\phi,Q)=\hat{x}\left(\tau_{BC}\right), y(\phi,Q)=\hat{y}\left(\tau_{BC}\right), \tau_C\le\tau_{BC}\le\tau_B; \end{cases} \quad (12)$$

$$\operatorname{grad}\phi\cdot\operatorname{grad}\psi=0, \forall(\phi,\psi)\in\partial G_\omega. \quad (13)$$

Здесь $\widetilde{\psi}^{-1}(\psi),\widetilde{\phi}^{-1}(\phi)$ – непрерывные функции, обратные соответственно к $\phi=\widetilde{\phi}\left(\hat{x}(\tau),\hat{y}(\tau)\right), \tau\in[\tau_A;\tau_D], \psi=\widetilde{\psi}\left(\hat{x}(\tau),\hat{y}(\tau)\right), \tau\in[\tau_B;\tau_A^*]; \partial G_\omega=\{(\phi,\psi):(\phi=\phi_*, 0\le\psi\le Q)\vee(\phi=\phi^*,0\le\psi\le Q)\vee(\phi_*\le\phi\le\phi^*,\psi=0)\vee(\phi_*\le\phi\le\phi^*,\psi=Q)\}$.

4. Разностные аналоги уравнений

Разностные аналоги уравнений (10) (выполнение которых требуем только во внутренности области G_Z), краевых условий (11) - (12) и условий ортогональности (13) кривых $\phi(x,y)=const, \psi(x,y)=const$ вдоль ∂G_z у $G_\omega^\gamma=\{(\phi_i,\psi_j):\phi_i=\phi_*+i*\Delta\phi, i=\overline{0,m+1}; \psi_j=j*\Delta, j=\overline{0,n+1}; \Delta\phi=\frac{\phi^*=\phi_*}{m+1}, \Delta\psi=\frac{Q}{n+1}, \gamma=\frac{\Delta\phi}{\Delta\psi}, m,n\in N\}$, запишем в следующем виде:

$$\begin{cases} \gamma^2(\kappa_{i,j+1/2}\left(x_{i,j+1/2}-x_{i,j}\right)-\kappa_{i,j-1/2}\left(x_{i,j}-x_{i,j-1}\right))+\frac{x_{i+1,j}-x_{i,j}}{k_{i+1/2,j}}- \\ -\frac{x_{i,j}-x_{i-1,j}}{k_{i-1/2,j}}=0, \qquad \gamma^2(\kappa_{i,j+1/2}(y_{i,j+1/2}-y_{i,j})- \\ -\kappa_{i,j-1/2}\left(y_{i,j}-y_{i,j-1}\right))+\frac{y_{i+1,j}-y_{i,j}}{k_{i+1/2,j}}-\frac{y_{i,j}-y_{i-1,j}}{k_{i-1/2,j}}=0; \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} x_{0,j}=\hat{x}\left(\widetilde{\psi}^{-1}(\psi_j)\right), y_{0,j}=\hat{y}\left(\widetilde{\psi}^{-1}(\psi_j)\right), \\ x_{i,0}=\hat{x}\left(\widetilde{\phi}^{-1}(\phi_i)\right), y_{i,0}=\hat{y}\left(\widetilde{\phi}^{-1}(\phi_i)\right); \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} \hat{x}'(\tau_{CD_j})\left(y_{m,j}-\hat{y}(\tau_{CD_j}\right)-\hat{y}'(\tau_{CD_j})\left(x_{m,j}-\hat{x}(\tau_{CD_j}\right)=0, \\ x_{m+1,j}=\hat{x}'(\tau_{CD_j}), y_{m+1,j}=\hat{y}'(\tau_{CD_j}); \\ \hat{x}'(\tau_{BC_i})\left(y_{i,n}-\hat{y}(\tau_{BC_i}\right)-\hat{y}'(\tau_{BC_i})\left(x_{i,n}-\hat{x}(\tau_{BC_i}\right)=0, \\ x_{i,n+1}=\hat{x}'(\tau_{BC_i}), y_{i,n+1}=\hat{y}'(\tau_{BC_i}), \end{cases} \quad (16)$$

где γ – квазиконформный инвариант; $x_{i,j}=x(\phi_i,\psi_j), y_{i,j}=y(\phi_i,\psi_j), i=\overline{0,n+1}, j=\overline{0,m+1}$; $\kappa_{i,j\pm1/2}=\kappa_1(\phi_i)\kappa_2(\psi_{j\pm1/2})$, $\kappa_{i\pm1/2,j}=\kappa_1(\phi_{i\pm1/2})\kappa_2(\psi_j)$. Заметим, что для построения разностного аналога условий (10) было использовано интегро-интерполяционный метод, поскольку в постановке задачи отсутствует информация о непрерывной зависимости искомого коэффициента $\kappa(\phi,\psi)$ от своих аргументов.

Формулу для уточнения значений коэффициента κ получим на основании "квазиконформного подобия в малом"соответствующих прямоугольников двух областей G_z, G_ω, согласно которого:

$$\kappa_{1+1/2,j+1/2}=\frac{1}{\gamma}\frac{a_{i,j}+a_{i,j+1}}{b_{i,j}+b_{i+1,j}}, \quad (17)$$

где $a_{i,j}=\sqrt{(x_{i+1,j}-x_{i,j})^2+(y_{i+1,j}-y_{i,j})^2}$, $b_{i,j}=\sqrt{(x_{i,j+1}-x_{i,j})^2+(y_{i,j+1}-y_{i,j})^2}$.

Из анализа наложенных условий на искомый коэффициент κ заметим возможность его представления во внутренности G_z по соответствующим его значениям вдоль пограничных участков. Разностный аналог такой зависимости согласно выбранных обозначений запишем в виде:

$$\kappa_{i+1/2,j+1/2}=\frac{\kappa_{i+1/2,0}\cdot\kappa_{0,j+1/2}}{\kappa_{0,0}}. \quad (18)$$

5. Алгоритм решения

Алгоритм решения разностной задачи (14)-(18) построим с использованием идей блочной итерации и поочередной параметризации искомых величин и функции аналогично методам решения нелинейных обратных краевых задач теории фильтрации на квазиконформных отображения, предложенным в [5-7], с следующими отличиями:

- на начальном этапе из условия (15) для участков $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{AD}$ находим координаты граничных узлов, которые на последующих итерациях уточняться уже не будут;
- значение потока Q и квазиконформного инварианта γ определяется из входящих условий и не изменяются в процессе решения задачи;
- на основе очередного уточнения коэффициента $\kappa_{1/2,j+1/2}, \kappa_{i+1/2,1/2}, i = \overline{0,n}, j = \overline{0,m}$ вдоль приграничных участков $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{AD}$ согласно формуле (17) будем осуществлять уточнение значений $\kappa_{i+1/2,j+1/2}, i = \overline{0,n}, j = \overline{0,m}$ во внутренних точках области G_z согласно (18).

Для остановки итерационного процесса могут быть использованы следующие условия [6,7]:

$$S^{(k)} \leq \epsilon, \delta \leq \delta_*, \tag{19}$$

где $S^{(k)} = \underset{i,j}{max}\sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2}$, k – номер итерации, $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$, $\begin{cases} \delta_1 = \underset{i,j=1}{\overset{n-1,m-1}{max}} |(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - \gamma_l^p (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})|, l = \overline{1,4}, \\ \delta_2 = \underset{i,j=1}{\overset{n-1,m-1}{max}} |(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) - \gamma_l^p (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})|, p = \overline{1,2}. \end{cases}$

Как и в [5-7], обоснование построенного алгоритма, основанный на поочередной фиксации искомых коэффициента, внутренних и граничных узлов криволинейной области, проводится с использованием идей метода блочной итерации (см., напр., [8]) с выделением зон нарушения условий ортогональности рассчитанной динамической сетки (в случае, когда кривые $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CD}, \overset{\frown}{AD}$ границы области не являются ортогональными в точках пересечения).

6. Выводы

Предложенный подход к решению задачи идентификации для эллиптических дифференциальных уравнений дивергентного типа второго порядка апробирован на серии тестовых численных экспериментов (математических моделях процессов фильтрации в пористых средах [5-7]), путем решения двух задач: задачи на построение гидродинамической сетки для известного распределения коэффициента проводимости (согласно алгоритмов, предложенных в работах [5]) и задачи идентификации (на основе разработанного алгоритма) с использованием в качестве входных данных для обратной коэффициентной задачи функций и величин, полученных в результате решения предыдущей задачи. Проведенные исследования подтверждают возможность и целесообразность использования численных методов комплексного анализа (квазиконформных отображений) к решению двумерных обратных модельных задач для нелинейных (квазилинейных) эллиптических дифференциальных уравнений в областях, ограниченных линиями тока и эквипотенциальными линиями, в условиях идентификации коэффициента, характеризующего проводимость среды (например, коэффициентов фильтрации в гидрогеологических моделях или электрической проводимости в модельных задачах электротомографии), с вполне приемлемой для использования на практике степенью точности. Предложенный подход обеспечивает одновременный расчет динамических сеток (сеток комплексно сопряженных функций), что целесообразно при числовом решении краевых задач математической физики. Безусловно, что соответствующий алгоритм, который реализован в случае, когда искомый коэффициент в области комплексного потенциала допускает разделение переменных, может быть положен в основу более общего программного комплекса для исследования сред с произвольной зависимостью проводимости как от координат области комплексного потенциала, так и от координат физической области. В перспективе также проведение регуляризации найденных решений с целью минимизации влияния погрешностей во входных данных.

Summary

A.Y. Bomba, L.L. Kroka On the application of numerical methods complex analysis in solving a class of inverse problems. An approach to the solution of two-dimensional inverse problems in the areas, which are limited by the current lines and equipotential lines is proposed on the basis of the numerical method of the complex analysis. **Key words:** (inverse problem of identifying, stationary processes, elliptic differential equation, quasiconformal mappings.)

Литература

1. *Yeh. W.W-G.* Review of parameter identification procedures in groundwater hydrology: The inverse problem. Water Resources Research, 22(2): 95-108, 1986.

2. *Vainikko E., Vainikko G.* Some numerical schemes for the identification of the filtration coefficient. Acta et comment. univ. Tartuensis 937, (1992), pp. 90-102.

3. *Yavorskyy B.Y., Promovych Y.B., Shadrina G.M.* Structural identification of mathematical model of images reconstruction by electrical impedance tomography // Proceeding sof the IV International conference "Electronics and applied physics". 23-25 October, Kyiv, Ukraine. – 2008. – P. 85-86.

4. *Сушко И.А., Рыбин А.И.* Сравнение классического метода решения обратной задачи импедансной томографии с методом "зон" проводимости. // Вiсник Нацiонального технiчного унiверситету України "КПI"Серiя – Радiотехнiка. Радiоапаратобудування. – 2012. – N49. – С. 166-177.

5. *Бомба А.Я., Каштан С.С., Пригорницький Д.О., Ярощак С.В.* Методи комплексного аналiзу: Монографiя. – Рiвне: НУВГП, 2013 – 415 с.

6. *Бомба А.Я., Булавацький В.М., Скопецький В.В.* Нелiнiйнi математичнi моделi процесiв геогiдродинамiки. – К.:Наукова думка, – 2007. – 308с.

7. *Бомба А.Я., Каштан С.С.* Нелiнiйнi обернення крайових задач на квазiконформнi вiдображення при моделюваннi впливу градi?нтiв напору на процес фiльтрацiї // Математичнi методи та фiзико-механiчнi поля. – 2002. – 45, N 2. – С. 49-57.

8. *Ортега Д., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – Москва : Мир, 1975. – 558с.

9. *Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – Киев: Наукова думка, 1991. – 432с.

Бомба, Андрей Ярославович – доктор технических наук, профессор, Ровенский государственный гуманитарный университет, Украина

E-mail: *abomba@ukr.net*

Крока, Любовь Леонидовна – аспирант, Ровенский государственный гуманитарный университет, Украина

E-mail: *kroka.luba@gmail.com*